Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº20(2002), 57–75

Homogeneización, convergencia en dos escalas y espacios de Besicovitch generalizados

I. Gayte

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Universidad de Sevilla

gayte@numer.us.es

Resumen

En este trabajo resumiré los resultados obtenidos con J. Casado Díaz sobre los espacios de Besicovitch generalizados y sus aplicaciones a la Homogeneización de problemas lineales y no lineales con coeficientes casi periódicos.

Palabras clave: *Homogeneización, convergencias débiles, oscilaciones.*
Clasificación por materias AMS: *34B05*

1. Introducción.

Un problema clásico en la teoría de Homogeneización (ver [2], [20]) es encontrar la ecuación en derivadas parciales que resuelve la función límite de una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ donde cada u_ε es la solución de

$$\left\{\begin{array}{lll} -\mathrm{div}\, A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon = f & \text{en} & \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{1}$$

El conjunto Ω es un abierto, acotado, de $\mathbb{R}^N$, las componentes de la matriz $A(x)$ son funciones acotadas Y-periódicas, A satisface una hipótesis de coercividad, y f es un elemento de $H^{-1}(\Omega)$.

El problema (1) modeliza una gran diversidad de fenómenos físicos en un material heterogéneo, de composición periódica cada vez más fina.

La técnica de los desarrollos asintóticos, basada en suponer que u_ε tiene una expresión del tipo

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots, \tag{2}$$

permite encontrar de manera formal el problema que resuelve u, límite de u_ε:

$$\left\{\begin{array}{lll} -\mathrm{div}\,\bar{A}\nabla u = f & \text{en} & \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{3}$$

donde $\bar{A}$ es una matriz cuyos coeficientes no son el valor medio de los coeficientes de A, sino que

$$\bar{A}_{ij} = \frac{1}{|Y|}\int_Y (A_{ij} + \sum_{l=1}^{N} A_{il}\frac{\partial X^j}{\partial y_l})$$

y X^l es solución de un problema en la microestructura, en el cubo de periodicidad Y:

$$\left\{\begin{array}{l} -\mathrm{div}\,(A(\nabla X^l + e^l)) = 0 \\ X^l, \quad Y-\text{periódica}. \end{array}\right.$$

Sin embargo, este procedimiento no es una demostración. Es el método de la energía de Tartar [21], [17] el que permite demostrar que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \;\; \text{débilmente en } H_0^1(\Omega)$$

y

$$A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{A}\nabla u \;\; \text{débilmente en } L^2(\Omega)^N,$$

con u solución de (3). Se trata, básicamente, de multiplicar (1) por funciones "test" particulares para las cuales sea fácil pasar la límite en las distintas integrales que aparecen.

La convergencia en dos escalas para el caso periódico, desarrollada por G. Nguetseng [18] y posteriormente por G. Allaire [1], da rigor matemático al desarrollo asintótico (2), consiguiendo en un mismo proceso tanto el problema homogeneizado como la convergencia de $\{u_\varepsilon\}$ a u. Es una noción de convergencia intermedia entre la convergencia débil y la fuerte, aportando información sobre la microestructura del problema, información que no recoge el límite débil. Concretamente, la convergencia en dos escalas da el límite de

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\,dx$$

con $\{u_\varepsilon\}$ acotada en $L^2(\Omega)$ y ψ regular y periódica en la segunda variable. Este límite, dado por una función de dos variables, $u(x,y)$, periódica en la variable en microestructura y, es

$$\int_\Omega \frac{1}{|Y|}\int_Y u(x,y)\psi(x,y)\,dy\,dx.$$

Un resultado que da interés a esta noción de convergencia es el siguiente: Si $\{u_\varepsilon\}$ es una sucesión acotada en $L^2(\Omega)$, existe una subsucesión que converge en dos escalas, es decir, existe $u \in L^2(\Omega \times Y)$ y existe una subsucesión que seguiremos denotando por $\{\varepsilon\}$, tales que

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\,dx = \int_\Omega \frac{1}{|Y|}\int_Y u(x,y)\psi(x,y)\,dy\,dx \quad \forall\psi \in L^2(\Omega; C_\sharp(Y)),$$

donde $C_\sharp(Y)$ es el espacio de las funciones continuas Y-periódicas.

Decimos entonces que $\{u_\varepsilon\}$ converge en dos escalas a u y lo denotamos por $u_\varepsilon \overset{2e}{\rightharpoonup} u$.

Se trata, por tanto, de un teorema de compacidad secuencial para la convergencia en dos escalas. Supone, además, una herramienta clave para desarrollar el llamado método de la convergencia en dos escalas en problemas de Homogeneización.

Cabe plantearse entonces si el resultado sigue siendo cierto cuando ψ es una función casi periódica respecto a la segunda variable, a fin de extender el método a la homogeneización de problemas con coeficientes casi periódicos. Curiosamente, esta cuestión tan particular nos llevó, a Juan Casado Díaz y a mí, a plantearnos otras preguntas al margen ya de la teoría de la Homogeneización.

2. Convergencia en dos escalas con funciones casi periódicas.

Nuestro interés estaba en extender el resultado de G. Nguetseng y G. Allaire a funciones casi periódicas. Concretamente buscábamos el siguiente teorema:

Teorema 1 *Si $\{u_\varepsilon\}$ es una sucesión acotada en $L^2(\Omega)$, existe una subsucesión, que denotamos igual, y una función $u \in L^2(\Omega; B^2(\mathbb{R}^N))$, siendo $B^2(\mathbb{R}^N)$ el espacio de las funciones casi periódicas en el sentido de Besicovitch (ver [3]), tales que*

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx = \int_\Omega M\{u(x,\cdot)\psi(x,\cdot)\}\, dx \quad \forall \psi \in L^2(\Omega; CAP(\mathbb{R}^N)),$$

donde $CAP(\mathbb{R}^N)$ es el espacio de las funciones uniformemente casi periódicas. Si f es casi periódica, $M\{f\}$ representa su valor medio y se define como

$$M\{f\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{(2T)^N} \int_{[-T,T]^N} f(y)\, dy.$$

La principal diferencia con el caso periódico es que el espacio de las funciones ψ es ahora no separable, y el teorema de compacidad secuencial $*$-débil en el dual de un espacio separable, que era el resultado esencial para demostrar el teorema de G. Nguetseng y G. Allaire, no se puede aplicar en este caso. En su lugar obtuvimos el teorema siguiente:

Teorema 2 *Si H es un espacio prehilbertiano entonces satisface la siguiente propiedad: dada cualquier sucesión de funcionales lineales $f_\varepsilon : H \to \mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), tal que*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |f_\varepsilon(x)| \le C\|x\| \quad \forall x \in H \tag{4}$$

existe una subsucesión, $\{f_{\varepsilon_k}\}$, y existe un funcional lineal y continuo, $f \in H'$, verificando

$$\lim_{k\to+\infty} f_{\varepsilon_k}(x) =< f, x > \quad \forall x \in H.$$

En [5] publicamos estos resultados, si bien la demostración del Teorema 2 se encuentra en [6] y en una Nota remitida al comité evaluador de la revista C. R. Acad. Sci.
Se trata de un resultado de compacidad puntual de funcionales f_ε aún cuando éstos no sean continuos y el espacio no sea completo. En su lugar satisfacen una "continuidad en el límite" que es la ecuación (4).

Nótese que el resultado es inmediato si el espacio es separable. Donde verdaderamente tiene interés el teorema es en los espacios no separables.

Como consecuencia se demuestra el Teorema 1. Consideramos el espacio $L^2(\Omega; CAP(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}))$, que es prehilbertiano para el producto escalar de $L^2(\Omega; B^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}))$, i.e.,

$$(f,g) = \int_\Omega M\{f(x,\cdot)\bar{g}(x,\cdot)\},$$

y

$$f_\varepsilon(\psi) = \int_\Omega u_\varepsilon(x)\bar{\psi}(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx \quad \forall\psi \in L^2(\Omega; CAP(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})).$$

La sucesión $\{f_\varepsilon\}$ verifica (4) y, por tanto, existe un funcional f lineal y continuo en $L^2(\Omega; CAP(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}))$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\bar{\psi}(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx =< f,\psi > .$$

Usando el hecho de que $L^2(\Omega; CAP(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}))$ es denso en $L^2(\Omega; B^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}))$ y el teorema de representación de Riesz-Fréchet, se deduce que existe $u \in L^2(\Omega; B^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}))$ tal que

$$< f,\psi >= \int_\Omega M\{u(x,\cdot)\bar{\psi}(x,\cdot)\}\,dx \quad \forall\psi \in L^2(\Omega; CAP(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})).$$

Volviendo al problema clásico de Homogeneización (1), donde ahora los coeficientes de la matriz A son funciones en $CAP(\mathbb{R}^N)$, el método de la convergencia en dos escalas proporciona el problema límite y los resultados de convergencia. Para ello hace falta caracterizar el límite en dos escalas de $\{\nabla u_\varepsilon\}$, una sucesión acotada en $L^2(\Omega)^N$. El Teorema 1 nos dice que para una subsucesión el límite en dos escalas existe y es una función $\xi \in L^2(\Omega; B^2(\mathbb{R}^N))^N$. Haciendo uso del desarrollo de Fourier de una función de $B^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ como una serie de exponenciales complejas, caracterizamos en [5] la función ξ como

$$\xi = \nabla u(x) + \nabla_y u(x,y),$$

donde u es el límite débil en $H_0^1(\Omega)$ de $\{u_\varepsilon\}$ y u_1 es una función en el espacio

$$W^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C}) = \{ \sum_{p\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \alpha_p e^{ip\cdot y} : \quad \alpha_p \in \mathbb{C}, \sum_{p\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} |\alpha_p|^2|p|^2 < +\infty\},$$

que está constituido por series formales cuyas derivadas de primer orden son funciones de $B^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ con media cero.

Probamos entonces que si u_ε es solución de (1) con los coeficientes de A funciones de $CAP(\mathbb{R}^N)$ y con A verificando las hipótesis de acotación habituales, para cualquier $f \in H^{-1}(\Omega)$ existen dos funciones, $u \in H_0^1(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega; W^2(\mathbb{R}^N))$, tales que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega)$$

y

$$\nabla u_\varepsilon \overset{2e}{\rightharpoonup} \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x,y),$$

donde u y u_1 resuelven el sistema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_x M_y\{A(y)(\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x,y))\} = f \quad \text{en} \quad H^{-1}(\Omega), \\ -\mathrm{div}_y[A(y)(\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x,y))] = 0 \quad \text{en} \quad W^2(\mathbb{R}^N)', \ \text{p.c.t. } x \in \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega; W^2(\mathbb{R}^N)). \end{cases}$$

Conseguimos extender el método de la convergencia en dos escalas de G. Nguetseng y G. Allaire a problemas de Homogeneización casi periódicos lineales. Nos preguntamos entonces cómo aplicarlo a problemas de homogeneización monótonos o pseudomonótonos. Los desarrollos de Fourier ya no podíamos usarlos.

Los profesores E. Fernández Cara y J.L. Lions, que conocieron nuestro trabajo, intuyeron que el Teorema 2 debería de poderse extender a espacios más generales, en concreto, pensaban en espacios reflexivos. Tampoco puedo olvidar la útil referencia que nos dio J.L Lions, un libro de V.V. Zhikov, S.M. Kozlov y O.A. Oleinik [14], donde se definían unos espacios de Hilbert construidos a partir de álgebras de funciones, y que generalizaban a los espacios $B^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$. Estas consideraciones nos llevaron a buscar respuestas a otros problemas del Análisis Funcional.

3. Un resultado de compacidad secuencial para funcionales no continuos.

En mi Tesis Doctoral (1998), dirigida por J. Casado Díaz y J. Couce Calvo, presentamos un resultado de compacidad que extendía el Teorema 2 a espacios reflexivos. Concretamente probamos el siguiente teorema:

Teorema 3 *Sea X un subespacio vectorial (no necesariamente cerrado) contenido en un espacio vectorial Y, dotado de una seminorma tal que el espacio cociente sobre el núcleo de esa seminorma, N, es un espacio de Banach reflexivo. Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funcionales lineales (no necesariamente continuos) tales que existe $C > 0$ verificando*

$$\limsup |f_n(x)| \le C[x] \quad \forall x \in X.$$

Entonces, existe una subsucesión $\{n_k\}$ de $\{n\}$ y existe $f \in (Y/N)'$ tales que

$$\exists \lim_k f_{n_k}(x) =< f, \hat{x} > \quad \forall x \in X.$$

El elemento $\hat{x}$ representa la clase de equivalencia en Y/N de x y $[\cdot]$ es la seminorma en Y.

La clave para la demostración está en un resultado de E. Asplund y J. Lindestrauss [15] por el que un espacio reflexivo tiene siempre una norma equivalente que lo hace regular, es decir, que para todo elemento del espacio existe un único elemento del dual, de norma 1, alineado con él.

También aparece en mi Tesis un resultado más general que el Teorema 3, que es el que extiende los teoremas clásicos de compacidad secuencial en el dual de un espacio separable y en un espacio reflexivo, aunque para los resultados de convergencia en dos escalas el que necesitaremos es este último.

4. Espacios de Besicovitch generalizados. Derivación.

En un principio, el marco funcional en el que queríamos generalizar el teorema de G. Nguetseng y G. Allaire eran las funciones casi periódicas. Sin embargo, la referencia proporcionada por J.L. Lions y el hecho de que las dificultades de las funciones casi periódicas eran las mismas que si trabajábamos con espacios más generales, nos llevaron a estudiar estos últimos y a desarrollar la convergencia en dos escalas en este marco.
Lo importante era, a mi entender, que los resultados obtenidos no sólo eran nuevos para estos espacios más generales, sino que muchos de ellos no se conocían tampoco, hasta donde yo puedo saber, para las funciones casi periódicas.

Siguiendo a V.V. Zhikov, S.M. Kozlov y O.A. Oleinik [14], [22], partíamos de un álgebra de Banach con valor medio, X. Este es un espacio de funciones $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, uniformemente continuas, acotadas, que poseen valor medio, i.e.

$$\exists \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{|K_T|} \int_{K_T} f(x)\, dx = M\{f\},$$

donde K es cualquier conjunto medible, acotado, de medida no nula, en $\mathbb{R}^N$, y K_T es el homotético de K de razón T.

El espacio X es completo con la norma infinito, sin embargo, su cierre en la seminorma

$$[f]_p = \left(\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < +\infty, \tag{5}$$

donde B_T es la bola abierta en $\mathbb{R}^N$ de centro cero y radio T, define lo que hemos llamado espacios de Besicovitch generalizados. En efecto, se define el espacio de Besicovitch $B^p(X)$ de orden p ($1 \le p < +\infty$) generado por el álgebra X, como sigue:

$$B^p(X) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) : \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists\varphi_\varepsilon \in X \ \text{ tal que } [f - \varphi_\varepsilon]_p < \varepsilon\}.$$

Si $p = +\infty$, ponemos

$$B^\infty(X) = \{f \in B^1(X) : \ \sup_{p\ge1}[f]_p < +\infty\}.$$

Habitualmente es denotado por B^p, salvo cuando sea necesario indicar cuál es el álgebra que los genera.

Cuando el álgebra es $CAP(\mathbb{R}^N)$ el espacio que se genera es el de las funciones casi periódicas en el sentido de Besicovitch, de ahí que hayamos llamado a estos espacios de Besicovitch generalizados. El caso de las funciones periódicas también está incluido en esta definición, basta considerar $X = C_\sharp(Y)$ y el espacio de Besicovitch que resulta es $L^p_\sharp(Y)$, es decir, el espacio de las funciones de $L^p(Y)$ extendidas por Y-periodicidad a todo $\mathbb{R}^N$.

Definidos los espacios B^p, debíamos estudiar sus propiedades, especialmente la reflexividad, hipótesis esencial en la aplicación del Teorema 3.

Destacamos, entre otras propiedades, que cuando f pertenece a B^p, cualquiera que sea $p < +\infty$, existe la media de f y $[f]_p = M\{|f|^p\}^{\frac{1}{p}}$, lo que hace que B^p tenga una estructura similar a L^p sobre un espacio de probabilidad, reemplazando integrales por medias.
Probamos una desigualdad de tipo Hölder. Más precisamente, dadas $f \in B^p$ y $g \in B^{p'}$, se verifica que fg pertenece a B^1 y $[fg]_1 \leq [f]_p[g]_{p'}$. Dadas $f \in B^p$ y $g \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces fg pertenece a B^p y $[fg]_p \leq [f]_p\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Si $p \leq q$ y f pertenece a B^q entonces f pertenece a B^p y $[f]_p \leq [f]_q$, etc.

Respecto a la reflexividad, obtuvimos el siguiente resultado:

Teorema 4 *Si denotamos por $\mathcal{B}^p$ el espacio cociente de B^p con el núcleo de la seminorma $[\cdot]_p$, se tiene que para todo p con $1 \leq p < +\infty$ la aplicación $F : \mathcal{B}^{p'} \to (\mathcal{B}^p)'$, definida por*

$$< F\hat{u}, \hat{v} >= M\{uv\} \quad \text{si} \quad 1 < p < +\infty,$$

$$< F\hat{u}, \hat{v} >= M\{T_{[u]_\infty}(u)v\} \quad \text{si} \quad p = 1,$$

es un isomorfismo isométrico. En particular, los espacios $\mathcal{B}^p$ con $1 < p < +\infty$ son reflexivos. El espacio $\mathcal{B}^2$ es un espacio de Hilbert.

La demostración de este teorema usa esencialmente propiedades de las funciones truncadas de una función de Besicovitch. Así, si $T_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $r > 0$, es la función truncada a la altura r, es decir,

$$T_r(s) = \begin{cases} s & \text{si} \quad |s| \leq r, \\ r & \text{si} \quad s > r, \\ -r & \text{si} \quad s < -r, \end{cases}$$

probamos que si f pertenece a B^p, entonces $T_r(f)$ pertenece a B^∞ y $\lim[f - T_n(f)]_p = 0$. Estos resultados se tienen gracias a una propiedad fundamental que verifica todo álgebra con valor medio: Que es cerrada para aplicaciones continuas, es decir, si f pertenece a X y g es continua en $\mathbb{R}$ entonces $g(f)$ pertenece a X.

Es habitual que en los problemas de Homogeneización no interese solamente la convergencia en dos escalas de $\{u_\varepsilon\}$ sino también la de $\{\nabla u_\varepsilon\}$. Esto fue lo que nos llevó a definir el espacio $W^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ en [5]. En este nuevo marco funcional debíamos definir un espacio análogo que nos caracterizara el límite en dos escalas de $\{\nabla u_\varepsilon\}$. Fue entonces necesario desarrollar una teoría de diferenciación para los espacios de Besicovitch generalizados.

El concepto fundamental de esta teoría es el de derivada en media de una función de B^1, que es una definición análoga a la de derivada distribucional de una función de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Para ello, hacía falta definir en este contexto un espacio que jugara el papel que juega $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ (funciones infinitamente derivables, de soporte compacto) en la teoría distribucional. Este espacio fue definido así:

$$D^\infty = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N): \quad D^\alpha f \in X \quad \forall \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N\}.$$

La propiedad fundamental que verifica D^∞ es que es denso en B^p para $p < +\infty$. Esto se demuestra haciendo uso de la convolución.

Definimos entonces la derivada i-ésima en media de $f \in B^1$, que denotamos por $\partial_{i,m} f$, como la aplicación lineal de D^∞ en $\mathbb{R}$ dada por

$$\partial_{i,m} f(\varphi) = -M\{f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\} \quad \forall \varphi \in D^\infty,$$

en claro paralelismo con la derivada distribucional. Llamamos gradiente en media de f a $\nabla_m f = (\partial_{1,m} f, \ldots, \partial_{N,m} f)$, y divergencia en media de $F \in (B^1)^N$ a $\mathrm{div}_m F = \sum_{i=1}^N \partial_{i,m} F_i$.
A partir de las derivadas en media se puede hacer una construcción similar a la de los espacios de Sobolev y definir

$$B^{1,p} = \{f \in B^p: \ \exists f_i \in B^p \text{ con } \partial_{i,m} f(\varphi) = M\{f_i \varphi\} \ \forall \varphi \in D^\infty, \ \forall i, \ 1 \le i \le N\}.$$

Para nuestros propósitos precisábamos profundizar en la relación entre este concepto de derivación y el de derivada distribucional. Conseguimos una fórmula de integración por partes

$$M\{u \frac{\partial v}{\partial x_i}\} = -M\{\frac{\partial u}{\partial x_i} v\},$$

válida cuando $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ pertenecen a B^p y $v, \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ pertenecen a $B^{p'}$, que nos da una relación entre los dos conceptos de derivación: Si u pertenece a B^p y su derivada distribucional respecto a x_i también, entonces $\partial_{i,m} u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ en B^p.

Para la relación recíproca es necesario introducir un nuevo espacio, que por otra parte será el que nos dé la caracterización del límite en dos escalas de $\{\nabla u_\varepsilon\}$. Definimos para $1 < p < +\infty$

$$W^p = \{f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N): \quad \nabla f \in (B^p)^N \text{ y } M\{\nabla f\} = 0\},$$

i.e. el espacio de las funciones que pueden no ser de Besicovitch pero sí sus gradientes, y además, estos últimos con media cero.

Demostramos entonces un teorema esencial para todo lo que sigue:

Teorema 5 *El espacio ∇W^p es un subespacio vectorial cerrado de $(B^p)^N$.*

La demostración es bastante técnica y requiere obtener previamente una desigualdad del tipo "Poincaré-Wirtinger".

Esta propiedad de ∇W^p nos da la relación recíproca entre derivada en media y derivada distribucional: Si $u \in B^p$ es tal que $\nabla_m u$ pertenece a $(B^p)^N$, entonces existe $v \in W^p$ tal que

$$[\nabla v - \nabla_m u]_p = 0,$$

es decir, ∇v y $\nabla_m u$ son iguales en $(B^p)^N$.

Para tratar un problema de Homogeneización con la técnica de doble escala, es necesario pasar por la formulación variacional del problema con funciones "test" regulares pertenecientes a un subespacio denso de un cierto espacio. Debíamos obtener resultados de densidad en ∇W^p, lo que nos llevó a definir el subespacio de B^p siguiente para $1 \leq p < +\infty$:

$$S^p = \{v \in B^p \cap W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N) : \quad \nabla v \in (B^p)^N\}.$$

Cuando al álgebra X se le pide una propiedad más, la ergodicidad, que en particular es satisfecha por $CAP(\mathbb{R}^N)$, se puede demostrar que ∇S^p es denso en ∇W^p. Este resultado, hasta donde nosotros conocemos, es también nuevo para las funciones casi periódicas. En la Homogeneización de problemas elípticos lineales con coeficientes casi periódicos (ver [19]), O.A. Oleinik y V.V. Zhikov trabajan con la adherencia del espacio de gradientes de polinomios trigonométricos sin llegar a caracterizar ésta, que no es sino ∇W^p, es decir, el espacio de las funciones casi periódicas que son el gradiente de otra función.

Otro resultado de densidad también útil es que, cuando X es ergódica, $\nabla_m B^{1,p}$ es denso en ∇W^p. Que un álgebra sea ergódica significa que para toda $f \in B^1$ que satisfaga

$$[f - f(\cdot + s)]_1 = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^N \tag{6}$$

se tiene necesariamente que $[f - M\{f\}]_1 = 0$, es decir, que f es igual (en B^1) a una constante. Una caracterización curiosa de las funciones que satisfacen (6) es que su gradiente en media es cero.

5. Resultados de compacidad para la convergencia en dos escalas.

Con este estudio de los espacios de Besicovitch generalizados y de la derivación, podíamos ahora demostrar los teoremas de convergencia en dos escalas en este marco más general.

El primer resultado que buscábamos era un teorema de compacidad que nos permitiera pasar al límite cuando ε tiende a cero en expresiones del tipo

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx$$

para funciones $\psi(x,y)$ tales que $\psi(x,\cdot)$ fuese una función de Besicovitch generalizada.

Una dificultad técnica, que ya aparece en el caso periódico (ver [1]) es que cuando ψ pertenece a $L^p(\Omega;B^p)$ la función $\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})$ puede no ser ni siquiera medible. G. Allaire evita este problema definiendo la convergencia en dos escalas para funciones ψ muy regulares, $\psi\in L^p(\Omega;C_\sharp(Y))$ y diciendo que los resultados se tienen también para otros espacios de funciones ψ. Lo que hicimos nosotros fue definir la convergencia en dos escalas de esta forma:

Definición 1 *Se dice que una sucesión $\{u_\varepsilon\}\subset L^1_{loc}(\Omega)$ converge en dos escalas a $u\in L^1_{loc}(\Omega;B^1)$ si para toda función ψ de la forma $\psi(x,y)=g(y)X_E(x)$, con $g\in B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $E\subset\subset\Omega$ medible, de medida finita, se verifica*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx=\int_\Omega M_y\{u(x,y)\psi(x,y)\}\,dx. \tag{7}$$

Denotaremos entonces $u_\varepsilon \xrightarrow{2e} u$.

Definiendo ahora un subespacio A^p de $L^p(\Omega;B^p)$ formado por funciones que se aproximan por funciones escalonadas, es fácil comprobar que (7) se tiene para funciones $\psi\in A^p$, y este subespacio incluye todos los subespacios interesantes, como $L^p(\Omega;X)$, $C_c(\Omega;B^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, $L^p(\Omega)\otimes B^p$, etc.

Al igual que ocurre con la convergencia débil, la convergencia en dos escalas verifica un resultado de semicontinuidad inferior: Si $\{u_\varepsilon\}\subset L^p(\Omega)$ converge en dos escalas a $u\in L^p(\Omega;B^p)$ entonces $\liminf_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}\geq\|u\|_{L^p(\Omega;B^p)}$. También se tiene un resultado de corrector para u_ε: Si $\{u_\varepsilon\}\subset L^p(\Omega)$ converge en dos escalas a $u\in L^p(\Omega;B^p)$ y u pertenece a A^p, es decir, es suficientemente regular como para que $u(x,\frac{x}{\varepsilon})$ pertenezca a $L^p(\Omega)$ y verifique

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |u(x,\frac{x}{\varepsilon})|^p dx=\int_\Omega M_y\{|u(x,y)|^p\}dx,$$

entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon(x)-u(x,\frac{x}{\varepsilon})\|_{L^p(\Omega)}=0.$$

Con este estudio de la convergencia en dos escalas y el Teorema 3, demostramos en [8] y [11] el resultado de compacidad que íbamos buscando:

Teorema 6 *Sea $\{u_\varepsilon\}$ una sucesión acotada en $L^p(\Omega)$, $1<p<+\infty$. Entonces existe una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{u_\varepsilon\}$ y existe $u\in L^p(\Omega;B^p)$, tal que $u_\varepsilon \xrightarrow{2e} u$.*

La demostración consiste en considerar la sucesión de funcionales lineales

$$F_\varepsilon : A^{p'}\subset L^{p'}(\Omega;B^{p'})\to\mathbb{R}$$

$$\psi\to F_\varepsilon(\psi),$$

donde

$$F_\varepsilon(\psi)=\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx.$$

Estos funcionales satisfacen la hipótesis (4). Teniendo en cuenta que el dual de $L^p(\Omega; B^p)$ se identifica con $L^{p'}(\Omega; B^{p'})$, gracias a que B^p con $1 < p < +\infty$ es reflexivo, el Teorema 3 nos da la convergencia deseada.

Si la sucesión $\{u_\varepsilon\}$ está acotada en $L^1(\Omega)$, hace falta pedir que sea localmente equi-integrable para probar que existe una subsucesión que converge en dos escalas a una función $u \in L^1(\Omega; B^1)$. Es el resultado análogo al teorema de Dunford-Pettis para la convergencia débil en $L^1(\Omega)$.

Un hecho importante es que estos resultados de compacidad, tanto para $1 < p < +\infty$ como para $p = 1$, son óptimos, es decir, no se puede dar más regularidad que $L^p(\Omega; B^p)$ para la función límite u.

Si deseábamos extender la técnica de la convergencia en dos escalas a problemas de Homogeneización más generales que los periódicos no nos podíamos conformar con el resultado de compacidad para sucesiones acotadas en $L^p(\Omega)$. Había que buscar caracterizar el límite en dos escalas de $\{\nabla u_\varepsilon\}$ cuando $\{u_\varepsilon\}$ está acotada en $W^{1,p}(\Omega)$, porque esta es la situación que se da en los problemas de Homogeneización. Aquí encontramos nuevas dificultades. A diferencia del caso periódico, no conocíamos un resultado del tipo de De Rham, que caracterizara el ortogonal de las funciones de Besicovitch con divergencia nula como gradiente de funciones. El procedimiento para obtener el límite en dos escalas de $\{\nabla u_\varepsilon\}$ fue totalmente distinto del caso periódico.
A partir de la convergencia en dos escalas de una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ a u probamos la convergencia en dos escalas de $\dfrac{1}{|B_R|}\displaystyle\int_{B_R} u_\varepsilon(x + \varepsilon\rho)\, d\rho$ a $\dfrac{1}{|B_R|}\displaystyle\int_{B_R} u(x, y + \rho)\, d\rho$. Esta propiedad, junto con el hecho de que si el álgebra es ergódica los gradientes en media de funciones de Besicovitch forman un subespacio denso de ∇W^p, constituyen las herramientas básicas para probar el teorema siguiente:

Teorema 7 *Sea X un álgebra ergódica y $\{u_\varepsilon\}$ una sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega)$ con $1 < p < +\infty$. Entonces existen una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{u_\varepsilon\}$, y funciones $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $u_1 \in L^p(\Omega; W^p)$, para las cuales se verifica*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad W^{1,p}(\Omega) - \textit{débil}$$

$$\nabla u_\varepsilon \overset{2e}{\rightharpoonup} \nabla u + \nabla_y u_1.$$

También probamos que la regularidad de u_1 es óptima.

6. Problemas en derivadas parciales en los espacios B^p.

La teoría de derivación nos llevó a J. Casado Díaz y a mí a plantearnos la existencia de solución de problemas en derivadas parciales en el marco de los espacios de Besicovitch generalizados. Así por ejemplo, dado un problema lineal sencillo

$$-\mathrm{div}\, A(\nabla u + \lambda) = 0 \ \text{ en } \ \mathbb{R}^N,$$

donde λ es un vector de $\mathbb{R}^N$ y A es una matriz cuyas componentes son funciones de Besicovitch generalizadas, buscábamos una solución u tal que ∇u fuese una función de Besicovitch. Este tipo de problemas aparecen de manera natural al efectuar la Homogeneización de (1). Se trata del llamado problema en microestructura.

Nuestra teoría podía ser usada para obtener resultados de existencia de solución de problemas en derivadas parciales no lineales, como por ejemplo

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + \lambda |u|^{p-2} u = -\operatorname{div} G \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N,$$

donde los coeficientes de a y de G son funciones de Besicovitch generalizadas.

En [7] presentamos la teoría desarrollada en [11] sobre los espacios de Besicovitch generalizados y su derivación, y aplicamos los resultados a la demostración de existencia de solución de Besicovitch de problemas en derivadas parciales formulados en este marco.

En relación a la teoría de diferenciación, hay algunos resultados y definiciones nuevos respecto a lo desarrollado en [11]. La definición del espacio D^∞, espacio de funciones regulares sobre el que actuaba la derivada en media, que damos en el artículo es la siguiente:

$$D^\infty = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \quad D^\alpha f \in B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \forall \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N\}. \tag{8}$$

Es un subespacio mayor que el que primeramente definimos, en el que se siguen teniendo todas las propiedades que ya se tenían con la otra definición y no es necesario pasar ahora al subespacio S^p definido en la memoria.

Dedicamos más atención al espacio $B^{1,p}$ porque ahora este espacio aparece en la resolución de problemas en derivadas parciales. El espacio de Sobolev se definió como

$$B^{1,p} = \{u \in B^p : \ \exists u_i \in B^p \ \text{ con } \partial_{i,m}(u)\varphi = M\{u_i \varphi\} \ \forall \varphi \in D^\infty, \ \forall i, \ 1 \le i \le N\}.$$

Es fácil comprobar que estas funciones u_i, si existen, son únicas en la clase de $\mathcal{B}^p$, es decir, si existe una función v_i tal que $\partial_{i,m}(u)\varphi = M\{v_i \varphi\}$, para toda $\varphi \in D^\infty$, entonces $[u_i - v_i]_p = 0$.

Dotado de la seminorma

$$[u]_{1,p} = [u]_p + [\nabla_m u]_p,$$

$B^{1,p}$ es completo, y D^∞ es un subespacio denso. No sabemos si éste último resultado es cierto con la definición primitiva de D^∞, razón por la cual preferimos la definición (8).

Consideramos entonces el problema no lineal

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + \lambda |u|^{p-2} u = -\operatorname{div} G \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N, \tag{9}$$

donde $1 < p < +\infty$, G está en $(B^{p'})^N$, $\lambda \ge 0$ y $a : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tiene sus coeficientes en $B^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y es un operador monótono de orden p en su segunda variable. Para probar la existencia de solución de este problema

aplicamos la teoría de operadores monótonos (ver [16]). Sin embargo, hay una dificultad técnica previa a la aplicación del teorema de existencia de solución y es demostrar que $a(x, \nabla u)$ es una función de Besicovitch; tengamos en cuenta que en la formulación variacional aparece $M\{a(x, \nabla u) \cdot \nabla v\}$ y es necesario entonces asegurar que $a(x, \nabla u) \cdot \nabla v$ posee valor medio. La demostración es bastante técnica y consiste en usar el teorema de aproximación polinomial de Weierstrass, extendiéndolo al caso N-dimensional. Se comprueba que la composición de estas funciones polinomiales con una función de Besicovitch es nuevamente una función de Besicovitch y se concluye probando que una función que tenga las propiedades de a compuesta con una función de Besicovitch, se aproxima en la seminorma de Besicovitch por estas funciones polinomiales.
Demostramos que para $\lambda > 0$ existe solución de (9), $u \in B^{1,p}$, y para $\lambda = 0$ y suponiendo que el álgebra es ergódica, existe solución de (9), $u \in W^p$.

7. Homogeneización de problemas pseudo-monótonos con coeficientes en los espacios B^p.

Toda esta teoría sobre los espacios de Besicovitch generalizados y su derivación era necesaria también para la aplicación de la convergencia en dos escalas a problemas de Homogeneización más generales.

En [8] presentamos los resultados de convergencia en dos escalas desarrollados en la Tesis y los aplicamos a la Homogeneización de un problema en derivadas parciales con operador pseudo-monótono y cuyos coeficientes son funciones de Besicovitch generalizadas.

La Homogeneización de problemas no lineales en el caso de funciones casi periódicas ha sido estudiada en [4] mediante otras técnicas y para el caso de un operador monótono. Con el método de la doble escala conseguimos el problema límite para un operador pseudomonótono cuyos coeficientes pueden ser periódicos, casi periódicos o más generales.

Consideramos para $1 < p < +\infty$ el problema no lineal

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = f \;\text{ en }\; W^{-1,p'}(\Omega), \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases} \tag{10}$$

donde $a : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ define un operador pseudomonótono y $a(\cdot, s, \xi)$ pertenece a $(B^{p'})^N$ para todo $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, siendo $B^{p'}$ el espacio de Besicovitch generalizado generado por un álgebra ergódica.

Probamos entonces que al menos para una subsucesión,

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \;\text{ en }\; W_0^{1,p}(\Omega) - \text{débil},$$

$$\nabla u_\varepsilon \overset{2e}{\rightharpoonup} \nabla u + \nabla_y u_1,$$

y $(u, u_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega; W^p)$ es una solución del sistema homogeneizado en dos escalas

$$\begin{cases} -\operatorname{div} M_y\{a(y, u, \nabla u + \nabla_y u_1)\} = f \;\text{ en }\; W^{-1,p'}(\Omega) \\ -\operatorname{div}_{m,y}\{a(y, u, \nabla u + \nabla_y u_1)\} = 0 \;\text{ p.c.t. } x \in \Omega. \end{cases}$$

Este sistema conduce a la ecuación homogeneizada

$$\begin{cases} -\operatorname{div} b(u, \nabla u) = f \quad \text{en} \quad W^{-1,p'}(\Omega), \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

donde el operador b viene dado por

$$b(s, \xi) = M_y\{a(y, s, \xi + \nabla_y v_{s,\xi})\}$$

con $v_{s,\xi}$ solución del problema en microestructura

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_m a(y, s, \xi + \nabla_y v_{s,\xi}) = 0 \quad \text{en} \quad (W^p)' \\ v_{s,\xi} \in W^p. \end{cases}$$

Una característica importante del método de la convergencia en dos escalas es que resulta relativamente fácil obtener resultados de corrector. Bajo hipótesis de regularidad probamos que $u(\cdot) + \varepsilon u_1(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon})$ es un corrector en $W^{1,p}(\Omega)$ de u_ε solución de (10).

8. Extensión a funciones con rango en un espacio de Banach.

La idea esencial que saqué de todo esto es que había unos espacios que tenían un comportamiento análogo a los L^p_{loc} y que eran útiles. De hecho, veíamos que espacios bien conocidos y en principio bien distintos, como pueden ser el espacio de las funciones Y-periódicas o el de las casi periódicas en el sentido de Besicovitch, tienen una estructura común: Una misma definición engloba a estos espacios y a muchos otros que uno puede imaginar. Es cierto que el trabajo con los B^p presenta diferencias (y dificultades particulares) notables con los L^p: Ya no son en general separables; lo que en L^p es para casi todo punto en los B^p no tiene sentido porque una función de $L^p(\mathbb{R}^N)$ es el elemento nulo en los espacios cocientes $\mathcal{B}^p$ de manera que se puede cambiar una función en todo punto y seguir siendo el mismo elemento; hay una medida detrás de estos espacios pero no es σ-aditiva, sino finitamente aditiva;

$$\mu(E) = M\{X_E\}$$

para todo $E \subset \mathbb{R}^N$ tal que X_E pertenezca a B^1, etc.

Una cuestión que me pregunté fue si se podía extender la teoría precedente a funciones con valores en un espacio de Banach. El objetivo no era otro que poder aplicar la técnica de la doble escala a otros problemas de Homogeneización (por ejemplo a problemas evolutivos) y que por tanto $u_\varepsilon(x)$ perteneciera a un espacio de Banach.

En [13] intento responder a estas cuestiones, si bien es cierto que de una manera parcial, como paso a explicar a continuación.

Nos interesa caracterizar el límite de

$$\int_\Omega < u_\varepsilon(x), \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) >_{V,V'} \, dx, \tag{11}$$

donde V es un espacio de Banach (que será, en un problema de evolución, el espacio de la variable tiempo), $\{u_\varepsilon\}$ es una sucesión en $L^p(\Omega; V)$ y $\psi = \psi(x, y)$ es una función que toma valores en V' y que respecto a la variable y posee valor medio.

En el caso escalar, la hipótesis esencial que nos permitía obtener un resultado de compacidad para una sucesión como (11) era la reflexividad del espacio al que pertenecía ψ y, en definitiva, la reflexividad del espacio de Besicovitch generalizado B^p, para $1 < p < +\infty$.

Extender la definición de B^p al caso de funciones con rango en un espacio de Banach surgía de manera natural, de igual modo que la extensión de $L^p(\Omega)$ a $L^p(\Omega; V)$. Y demostrar algunas de sus propiedades también se tenía de manera inmediata, razonando como en el caso escalar. Sin embargo, el estudio de la dualidad da lugar a serias dificultades. Y esto también es esperable, porque con los L^p ya se tiene que hay una propiedad que interviene de manera esencial en la dualidad, la propiedad de Radon-Nikodym. Así que, de momento, me he tenido que conformar con obtener la reflexividad cuando las funciones toman valores en un espacio de Hilbert.

Teniendo en cuenta que buscábamos definir unos espacios de Besicovitch que generalizaran a los espacios de funciones periódicas con valores en V o funciones casi periódicas con valores en V, consideramos el cierre en la norma de $C_b(\mathbb{R}^N; V)$ (funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}^N$ en V) del espacio

$$\{\sum_{i\in I} f_i v_i : \quad f_i \in X,\ v_i \in V,\ \forall i \in I,\ \forall I \subset \mathbb{N} \text{ finito}\}$$

donde X es un álgebra de Banach con valor medio.

Denotamos $\tilde{X}_V$ este subespacio de $C_b(\mathbb{R}^N; V)$. Se trata del "espacio pivote" con el que generamos el espacio de Besicovitch. Para $1 \le p < +\infty$, se define el espacio de Besicovitch generalizado con valores en V

$$B^p_V(X) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N; V).\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \varphi_\varepsilon \in \tilde{X}_V \ \text{ con } [f - \varphi_\varepsilon]_{p,V} < \varepsilon\},$$

donde

$$[f]_{p,V} = \left(\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{|B_T|} \int_{B_T} \|f(x)\|^p_V dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{12}$$

A la vista de (12) me pregunté si $[f]_{p,V}$ podía ser igual a $M\{\|f(\cdot)\|^p_V\}^{\frac{1}{p}}$. La respuesta que obtuve fue que sí, gracias a un resultado de carácter general que me sería también de utilidad en la demostración de la reflexividad. Se tiene la siguiente propiedad de $\tilde{X}_V$:

Proposición 8 *Sean W un espacio de Banach, $f \in \tilde{X}_V$ y g una función continua en $\overline{Rgf}$ con valores en W. Entonces $g(f)$ pertenece a $\tilde{X}_W$.*

Para el caso escalar ya estaba probado el resultado en [7] y [11]. Allí la clave era el teorema de Stone-Weiestrass. Al tener ahora funciones con valores en un espacio de Banach, necesitábamos un resultado que extendiera el teorema de Stone-Weierstrass a este caso. Probé entonces el siguiente teorema:

Teorema 9 *Sea K un espacio compacto, W un espacio de Banach y B un subespacio de $C(K;W)$ con las propiedades:*

1. *B contiene a las funciones constantes.*

2. *B separa puntos de K.*

3. *Para todo funcional multilineal continuo de W en $\mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{L}_n(W;\mathbb{R})$, para todo conjunto $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset B$ y para todo $w \in S$, siendo S un denso de W, se verifica que $\psi(\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(\cdot))w$ pertenece a B.*

Entonces B es denso en $C(K;W)$.

La demostración consiste en usar el teorema de la partición de la unidad y el teorema de Stone-Weierstrass.

Dos consecuencias de la Proposición 8 son, de una parte, que si f pertenece a $\tilde{X}_V$ entonces $\|f(\cdot)\|_V^p$ pertenece a X y por consiguiente existe $M\{\|f(\cdot)\|_V^p\}$ y, por otra, que si se define la función $T_r : V \to V$, con $r > 0$, como

$$T_r(v) = \begin{cases} v & \text{si} \quad \|v\| \leq r, \\ r\frac{v}{\|v\|} & \text{si} \quad \|v\| > r, \end{cases}$$

(una función truncada pero en el caso vectorial), dada $f \in \tilde{X}_V$ se verifica que $T_r(f)$ pertenece a $\tilde{X}_V$.

Con el primer resultado se obtiene fácilmente que si f pertenece a $B_V^p(X)$, $p < +\infty$, entonces existe $M\{\|f(\cdot)\|_V^p\}$ y por tanto $[f]_{p,V} = M\{\|f(\cdot)\|_V^p\}^{\frac{1}{p}}$. La segunda consecuencia permite demostrar la reflexividad de $B_H^p(X)$, para $1 < p < +\infty$ y H un espacio de Hilbert, siguiendo los pasos de la demostración del caso escalar. Demostramos entonces que la aplicación

$$F : B_H^{p'}(X) \to (B_H^p(X))'$$

dada por

$$< Fg, f >= M\{(g,f)_H\} \quad \forall f \in B_H^p(X),\ \forall g \in B_H^{p'}(X)$$

es un isomorfismo isométrico. Con este resultado se demuestra el teorema de compacidad para la convergencia en dos escalas:

Teorema 10 *Sea $\{u_\varepsilon\}$ una sucesión acotada en $L^p(\Omega;H)$, $1 < p < +\infty$. Entonces, existe una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{u_\varepsilon\}$, y una función $u \in L^p(\Omega; B_H^p(X))$ tal que*

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega (u_\varepsilon(x), \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}))_H dx = \int_\Omega M_y\{(u(x,y), \psi(x,y))_H\} dx \quad \forall \psi \in L^{p'}(\Omega; \tilde{X}_H).$$

En [12] se aplica la técnica de la doble escala a la Homogeneización de una ecuación de transporte lineal, con campo de velocidades y dato inicial oscilando casi periódicamente. En concreto, consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + \nabla_x \cdot (a^\varepsilon(x)u^\varepsilon) = 0 \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}), \end{cases} \tag{13}$$

donde a es un campo vectorial con divergencia nula respecto de x y respecto de y, $a^\varepsilon(x) = (a_1(x, \frac{x}{\varepsilon}), \dots, a_N(x, \frac{x}{\varepsilon}))$ y tanto las funciones $a_i(x,y)$ como $u_0(x,y)$ son casi periódicas en y. El método de la convergencia en dos escalas había sido aplicado ya a este problema en [10] cuando los datos eran periódicos.

Se tiene que $\{u^\varepsilon\}$, solución de (13), converge en dos escalas a u, que es una función de tres variables, (x,y,t), que con respecto a x pertenece a L^2_{loc}, con respecto a y es casi periódica en el sentido de Besicovitch y con respecto a t está en L^∞_{loc} y es la solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} M_y\{u(x,y,t)\} + \mathrm{div}_x M_y\{a(x,y)u(x,y,t)\} = 0, \\ a(x,y) \cdot \nabla_{m,y} u = 0, \\ M_y\{u(x,y,0)\} = M_y\{u_0(x,y)\}. \end{cases}$$

Abordar otros problemas de evolución donde aparezcan derivadas respecto de variables espaciales de orden dos requiere desarrollar con mayor profundidad la teoría de la convergencia en dos escalas y de los espacios de Besicovitch para funciones con rango en un espacio de Banach.

Sería interesante obtener un resultado de reflexividad para los espacios $B^p_V(X)$, sin tener que limitarnos a que V sea un espacio de Hilbert. Para ello haría falta formular una propiedad de Radon-Nikodym en este marco y hacer un estudio como el que se hace en [9] para los espacios $B^p_V(X)$. Esta es una de las cuestiones que estoy actualmente estudiando.

Entiendo que desarrollar una teoría de diferenciación y caracterizar el límite en dos escalas de $\nabla_x u_\varepsilon$ cuando $\{u_\varepsilon\}$ está contenida en $L^p(\Omega; V)$ es imprescindible para poder aplicar el método a problemas con derivadas espaciales de segundo orden.

Y hay otras cuestiones que quedaron aparcadas en el caso escalar. Entre otras, estudiar la existencia de una "medida de Young en dos escalas" (hay un trabajo que analiza el caso periódico, véase [10]).

Referencias

[1] G. Allaire, *Homogenization and two-scale convergence.* SIAM J. Math. Anal., 23, 6 (1992), 1482-1518.

[2] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures.* North-Holland, Amsterdam, 1978.

[3] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions.* Dover, Cambridge, 1954.

[4] A. Braides, V. Chiadò Piat, A. Defranceschi, *Homogenization of almost periodic monotone operators.* Ann. I. H. P. Anal. Non. Lin., 9 (1992), 399-432.

[5] J. Casado Díaz, I. Gayte, *A general compactness result and its application to the two-scale convergence of almost periodic functions.* C. R. Acad. Sci. Paris, 323, I (1996), 329-334.

[6] J. Casado Díaz, I. Gayte, *Un teorema de compacidad y su aplicación a la convergencia en dos escalas.* Actas del XV C.E.D.Y.A./V C.M.A.

[7] J. Casado Díaz, I. Gayte, *A derivation theory for generalized Besicovitch spaces and its application for partial differential equations,* aparecerá en Proc. Royal Soc. Edinburgh.

[8] J. Casado Díaz, I. Gayte, *The two-scale convergence method applied to the generalized Besicovitch spaces,* aparecerá.

[9] J. Diestel, J.J. Uhl, *Vector measures,* Mathematical surveys and monographs, **15**, American Mathematical Society, Rhode Island, 1970.

[10] E. Weinan, *Homogenization of linear and nonlinear transport equations.* Communications on Pure and Applied Mathematics, **45**, (1992), 301-326.

[11] I. Gayte, *Espacios de Besicovitch generalizados y convergencia en dos escalas.* Tesis. Universidad de Sevilla, 1998.

[12] I. Gayte, *Método de la convergencia en dos escalas para funciones con valores en un espacio de Banach.* Actas del XVII C.E.D.Y.A./VII C.M.A.

[13] I. Gayte, *Some properties of spaces of functions with range in a Banach space and with mean value,* aparecerá.

[14] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, *Homogenization of differential operators and integral functionals.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[15] J. Lindenstrauss, *On non separable reflexive Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 967-970.

[16] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, Paris, 1969.

[17] F. Murat, *H-convergence.* Sèminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger, mimeographed notes 1978.

[18] G. Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization.* SIAM J. Math. Anal., 21, 6 (1990), 608-623.

[19] O. A. Oleinik, V. V. Zhikov, *On the homogenization of elliptic operators with almost-periodic coefficients.* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 52 (1982), 149-166.

[20] E. Sánchez Palencia, *Non-Homogeneous media and vibration theory.* Springer-Verlag, Lectures Notes in Physics 127, Berlin, 1980.

[21] L. Tartar, *Cours Peccot au Collège de France.* Unpublished, parcialmente escrito en [17], 1977.

[22] V. V. Zhikov, E. V. Krivenko, *Averaging of singularly pertubed elliptic operators.* Matem. Zametki, 33 (1983), 4, 571-582. English translation: Math. Notes, 33 (1983), 294-300.